ŠTVORLÍSTKOVÁ FONTÁNA

Z obrázkov ani zo sprievodného textu nevyplýva, že oblúky fontány sú polkružnice (pričom väčší a menší oblúk majú rovnaký stred). Očakávame, že žiaci to budú podvedome predpokladať, prípadne si to môžu objasniť v diskusii, ktorú ešte pred riešením úlohy rozprúdi učiteľ. (Našou snahou bolo nekomplikovať úvodný text množstvom predpokladov typických pre matematické vyjadrovanie, ktoré by podľa nášho názoru žiakov skôr odradili.)

Cieľom tejto témy nie je práca s približnými číslami, preto so všetkými údajmi uvedenými v texte pracujeme ako s presnými. Niektorí žiaci si pravdepodobne uvedomia, že rozmery znázornené v obr. 1 nemôžu byť úplne presné. Dôvody tohto uvedomenia si môžu byť

- *praktické: údaje sú získané dvomi rôznymi meradlami, každé má inú presnosť,*
- *teoretické: ak z uvedených rozmerov vyberieme jeden, zistíme, že nie je v úplnom súlade so zvyšnými rozmermi. Napr. keby sme údaje* 4,02 *m a* 1 *m na obr. 1 pokladali za presné, musela by mať menšia kružnica priemer nie* 5 *m (ako je to uvedené na obr. 1), ale* 4,978... *m.*

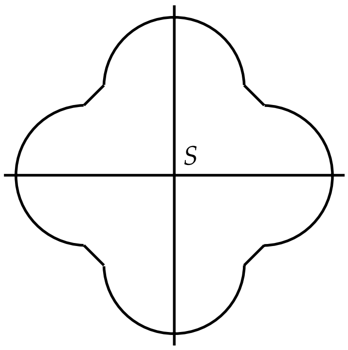
Ak takáto situácia nastane (teda niektorí žiaci si budú vedomí nepresnosti vstupných údajov), odporúčame dohodnúť sa, že úlohu najprv vyriešime tak, ako by všetky údaje boli presné, a až potom budeme diskutovať o tom, ako sa nepresnosť údajov prejaví na vypočítaných výsledkoch.

K otázke presnosti vstupných údajov sa dostaneme znovu pri porovnávaní rôznych postupov výpočtu objemu fontány. Tie povedú k rôznym výsledkom v závislosti od toho

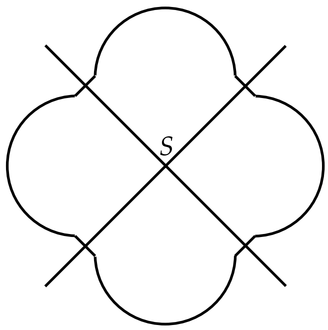
- *ktoré z údajov uvedených na obr. 1 žiaci použijú,*
- *nakoľko presnú hodnotu* π *použijú,*
- *či budú alebo nebudú zaokrúhľovať medzivýsledky svojich výpočtov (za správnejšie považujeme zaokrúhliť až konečný výsledok a medzivýsledky nezokrúhľovať).*

Porovnanie uvedených výsledkov môže byť ďalším podnetom na diskusiu o presnosti vstupných údajov, práci s približnými číslami a zaokrúhľovaní.

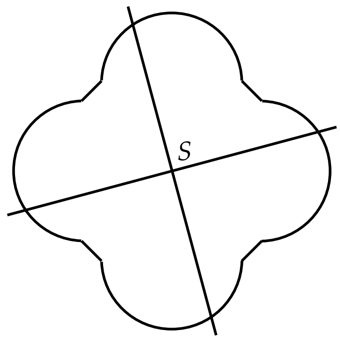
1. Dve najčastejšie očakávané možné riešenia sú na obrázkoch 5a a 5b. V skutočnosti má táto úloha nekonečne veľa riešení: ak plný uhol so stredom S rozdelíme dvomi kolmými priamkami prechádzajúcimi bodom S na štyri pravé uhly, dostaneme vždy rozdelenie fontány na štyri rovnaké časti.



obr. 5a



obr. 5b



obr. 5c

   Žiaci by v diskusii mohli objaviť, že fontánu možno rozložiť na 8 rovnakých častí.

2. Východiskom konštrukcie je lomená čiara ABC, pozri obr. 6. Tú vieme narysovať, pretože poznáme dĺžky $|AB| = 5$ m, $|BC| = 1$ m aj veľkosť uhla ABC:

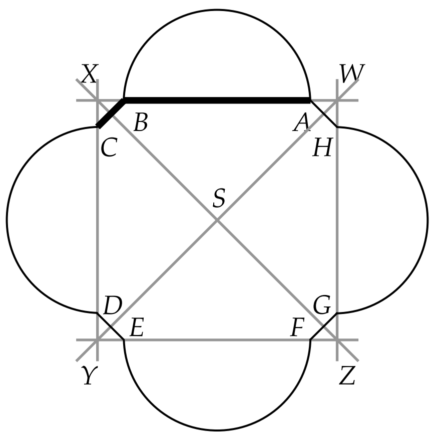
$$|\angle ABC| = 90° + 45° = 135° .$$

   Pokračovať možno viacerými spôsobmi, ktoré sa budú líšiť spôsobom využitia súmernosti pôdorysu fontány. Uvádzame dva z možných postupov:

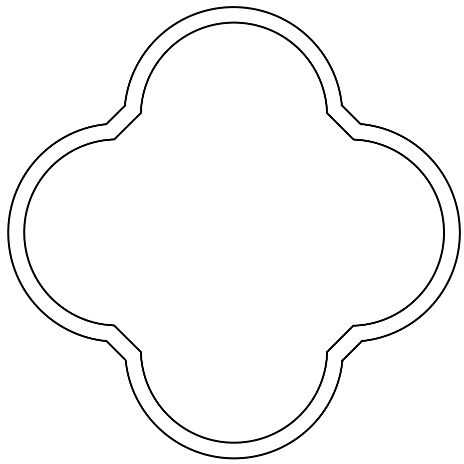
   a) prvý postup

      1. narysujeme lomenú čiaru ABC: $|AB| = 5$, $|BC| = 1$, $|\angle ABC| = 135°$,

2. nájdeme rysovaním bod H: $|AH| = 1$, $|\angle BAH| = 135°$ (body C a H sú súmerné podľa osi priamky AB),
3. bodmi C, B, A, H vedieme kolmice c, b, a, h na priamku AB (presnejšie povedané: c, b, a, h sú polpriamky kolmé na AB s krajnými bodmi C, B, A, H, tieto polpriamky ležia všetky v tej istej polrovine, ktorej hranicou je priamka AB),
4. nájdeme body D, G: body D a G ležia na polpriamkach c a h, pritom $|CD| = |HG| = 5$,
5. nájdeme body E, F: body E, F ležia na polpriamkach b, a, pritom vzdialenosti $|BE|$ a $|AF|$ sú rovnaké ako vzdialenosť $|CH|$, ktorú už poznáme,
6. narysujeme polkružnice s priemermi AB, CD, EF, GH tak aby ležali mimo osemuholníka $ABCDEFGH$



obr. 6



obr. 7

b) druhý postup:

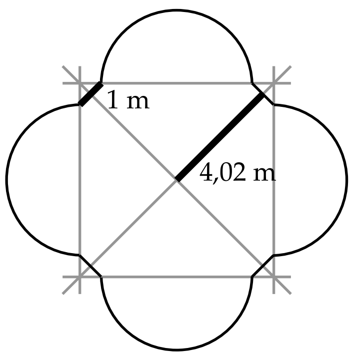
osemuholník $ABCDEFGH$, všetky vnútorné uhly majú veľkosť 135°, pre dĺžky strán platí

$$|AB| = |CD| = |EF| = |GH| = 5, \ |BC| = |DE| = |FG| = |HA| = 1.$$

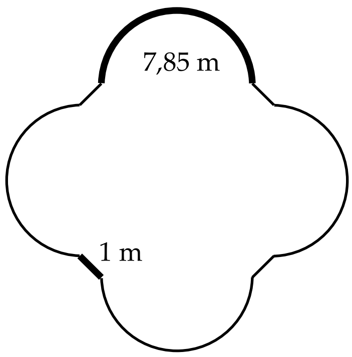
V mierke 1 : 100 bude mať úsečka AB dĺžku 5 cm.

Úplný pôdorys dostaneme, ak polomery polkružníc zväčšíme o 0,5 cm (táto dĺžka zodpovedá v mierke 1 : 100 hrúbke steny fontány, ktorá je 0,5 m) a narysujeme priamky p, q, r, s rovnobežné s BC, DE, FG, HA tak, aby vzdialenosť medzi p a BC, q a DE, r a FG, s a HA bola 0,5 cm. Priesečníky priamok p, q, r, s so susediacimi zväčšenými polkružnicami potom určia body, ktoré budú na vonkajšom obvode fontány zodpovedať bodom A, B, C, D, E, F, G, H, pozri obr. 7.

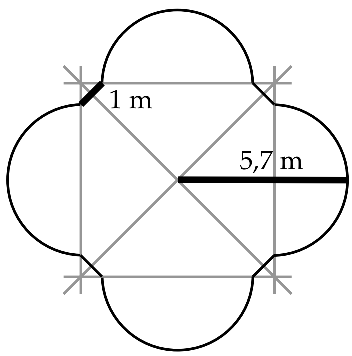
Poznámka. Úlohu 3 môžeme obmeniť tak, že obr. 2 nahradíme niektorým z obrázkov 8a, 8b, 8c (na každom z nich je zaznačená iná dvojica rozmerov). Takto obmenenú úlohu 3 môže učiteľ zadať ako domácu úlohu.



obr. 8a



obr. 8b



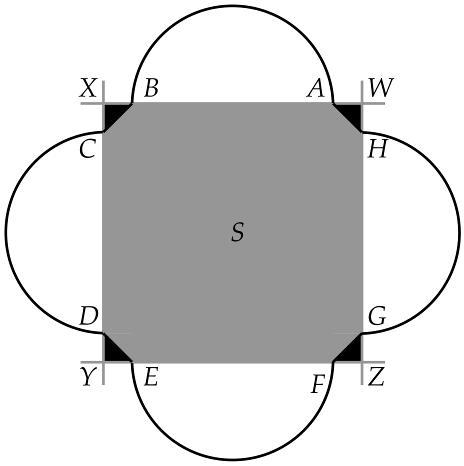
obr. 8c

3. približne **556** hl

Objem fontány (v m³) je

$$V = 0{,}7 \cdot S\,, \tag{1}$$

kde S je plošný obsah vnútorného pôdorysu fontány (ten sme doteraz nazývali zjednodušený pôdorys). Číslo S môžeme nájsť viacerými spôsobmi, ktoré sa líšia podľa toho, na aké geometrické útvary rozdelíme zjednodušený pôdorys. Jedna možnosť je opísaná pred zadaním úlohy 4, výpočty s ňou spojené uvedieme v riešení úlohy 5.



obr. 9

Iná možnosť je rozklad pôdorysu znázornený na obr. 9. Z neho vyplýva rovnosť

$$S = P_{WXYZ} - 4 \cdot P_{BXC} + 4 \cdot P_{polkruh}\,. \tag{2}$$

Najprv zistíme dĺžku $|BX|$. Vieme, že v pravouhlom rovnoramennom trojuholníku CBX sa $|CB| = 1$ m. Z Pytagorovej vety

$$|BX|^2 + |XC|^2 = |CB|^2\text{, t.j. } 2|BX|^2 = 1\,,$$

dostávame

$$|BX| = |CX| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,106\ \ldots\ \text{(m)}. \tag{3}$$

Potom

$$|WX| = |AB| + 2 \cdot |BX| = 5 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6{,}414\,213\ \ldots\ \text{(m)}, \tag{4}$$

preto

$$P_{WXYZ} = |WX|^2 = (6{,}414\,213\ \ldots)^2 = 41{,}142\,135\ \ldots\ \text{(m}^2\text{)}. \tag{5}$$

Ďalej

$$4 \cdot P_{BXC} = 4 \cdot \frac{|BX| \cdot |CX|}{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\ \text{(m}^2\text{)}, \tag{6}$$

$$4 \cdot P_{polkruh} = 2 \cdot P_{kruh} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = 2 \cdot 3{,}141\,592\ \ldots \cdot 2{,}5^2 = 39{,}269\,908\ \ldots\ . \tag{7}$$

Ak (5), (6) a (7) dosadíme do (2) a získané S dosadíme do (1), dostaneme

$$V = 0{,}7 \cdot (41{,}142\,135\ \ldots - 1 + 39{,}269\,908\ \ldots) = 0{,}7 \cdot 79{,}412\,043\ \ldots = 55{,}588\,430\ \ldots\ \text{m}^2 =$$

$$= 555{,}884\,30\ \ldots\ \text{hl} \approx 556\ \text{hl}.$$

Poznámka. Správnu približnú hodnotu objemu dostanú žiaci aj vtedy, keď obsahy (5), (6) a (7) najprv zaokrúhlia na desatiny, a až potom sčítajú a vynásobia 0,7. Je to však len zhoda okolností. Pri iných číslach by sa výsledok získaný týmto postupom mohol líšiť od správneho výsledku, pretože zaokrúhľovaním medzivýsledkov sa zmenšuje presnosť výslednej hodnoty. Porovnaj tiež s poznámkou 2 za riešením úlohy 5.

4. Monika plošný obsah vnútorného pôdorysu fontány nájde ako súčet plochy štyroch „úzkych“ rovnoramenných trojuholníkov (plocha jedného z nich je na obr. 4 označená S_1), štyroch „širokých“ rovnoramenných trojuholníkov (plocha jedného z nich je na obr. 4 označená S_2) a štyroch polkruhov (plocha jedného z nich je na obr. 4 označená S_3). Plošný obsah (v m²) potom vynásobí číslom 0,7:

$$V = 4 \cdot (S_1 + S_2 + S_3) \cdot 0{,}7 \ \ (\text{m}^2), \tag{8}$$

výsledok prevedie na hektolitre (teda vynásobí 10) a zaokrúhli na celé čísla.

5. približne **556** alebo **555** hl

Výsledok závisí od toho, či a ako žiaci zaokrúľovali medzivýsledky a nakoľko presnú hodnotu π použili, pozri poznámku za riešením úlohy 3 a poznámku 2 za riešením tejto úlohy.

Uvedieme výpočet podľa postupu opísaného v riešení úlohy 4 (označenia jednotlivých bodov pozri na obr. 6 a 9).

„Úzky“ rovnoramenný trojuholník (DSE) má podľa obr. 1 základňu dĺžky 1 m a výšku 4,02 m, preto jeho obsah je

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4{,}02 = 2{,}01 \ \ \text{m}^2.$$

Výška „širokého“ rovnoramenného trojuholníka (ESF) je polovica strany štvorca $WXYZ$. Na výpočet dĺžky $|WX|$ potrebujeme poznať dĺžku $|BX|$, tú nájdeme rovnako ako v riešení úlohy 4, pozri vzťahy (3) a (4):

$$|BX|^2 + |XC|^2 = |CB|^2, \quad \text{t.j.} \quad 2|BX|^2 = 1, \quad \text{odtiaľ} \quad |BX| = |CX| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,106\ldots \ \ (\text{m}).$$

Potom

$$|WX| = |AB| + 2 \cdot |BX| = 5 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6{,}414\,213\ldots \ \ (\text{m}).$$

Preto obsah „širokého“ rovnoramenného trojuholníka je

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot \frac{|WZ|}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{6{,}414\,213\ldots}{2} = 8{,}017\,766\ldots \ \ \text{m}^2.$$

Obsah polkruhu s priemerom 5 m je

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 = 9{,}817\,477\ldots \ \ \text{m}^2.$$

Dosadením hodnôt S_1, S_2 a S_3 do (8) dostaneme

$$V = 4 \cdot (2{,}01 + 8{,}017\,766\ldots + 9{,}817\,477\ldots) \cdot 0{,}7 = 55{,}566\,683\ldots \ \ \text{m}^3 =$$

$$= 555{,}666\,83\ldots \ \text{hl} \approx 556 \ \ \text{hl}.$$

Poznámka 1. Rozdiel medzi presným výsledkom tohto výpočtu a výpočtu z riešenia úlohy 4 spôsobila hodnota 4,02 na obr. 1 (teda výška na základňu v trojuholníku ASH). V ideálnom prípade (keby fontána bola dokonale súmerná a údaje uvedené na obr. 2 by boli presné) by uvedená úsečka mala mať dĺžku (označenia bodov pozri na obr. 6)

$$|SH| + \frac{|HW|}{2} = \sqrt{\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|HG|}{2}\right)^2} + \frac{|AH|}{2} = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2} + 0{,}5 = 4{,}035\,533\ldots \ \ (m).$$

Poznámka 2. V tomto prípade zaokrúhlenie dĺžky $|BX| = 0{,}707\,106\ldots$ na 1 desatinné miesto ($|BX| \approx 0{,}7$) spolu s použitím približnej hodnoty $\pi \approx 3{,}14$ vedie k výsledku 555 hl.